

Protocells 自由边界生长模型的适定性*

柏 萌, 崔尚斌

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘 要: 研究模拟 protocells 生长的自由边界问题, 此问题中控制自由边界 $\partial\Omega(t)$ 移动的演化方程为 $V_n = -\frac{\partial v}{\partial n} - \beta v$, 其中 V_n 表示边界 $\partial\Omega(t)$ 的法向速度, v 为构造物质的密度, β 为正常数。在 1999 年, Cui 和 Friedman 已研究了此问题径向对称的情况。主要针对径向不对称的情况。利用 Banach 空间中抛物方程的抽象理论证明此问题在 little Hölder 空间是局部适定的。

关键词: 自由边界问题; protocells; 适定性

中图分类号: O175 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2009) 04-0011-04

Well-posedness for a Free Boundary Problem Modeling Protocells

BAI Meng, CUI Shangbin

(School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: A free boundary problem modeling the growth of protocells is studied, in which the evolution equation governing the motion of the free boundary $\partial\Omega(t)$ is given by $V_n = -\frac{\partial v}{\partial n} - \beta v$, where V_n denotes the normal velocity of $\partial\Omega(t)$, v is the density of the building material, and β is a positive constant. The radially symmetric case of this problem was previously studied by Cui and Friedman in 1999. The general radially non-symmetric case is studied. With the abstract theory for parabolic differential equations in Banach spaces, the free boundary problem is locally well-posed in little Hölder spaces is proved.

Key words: free boundary problem; protocell; well-posedness

考虑下面多维自由边界问题:

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u, & x \in \Omega(t), t > 0, \\ \Delta v = \mu v - u, & x \in \Omega(t), t > 0, \\ u = a, & x \in \partial\Omega(t), t > 0, \\ v = b, & x \in \partial\Omega(t), t > 0, \\ V_n = -\frac{\partial v}{\partial n} - \beta v, & x \in \partial\Omega(t), t > 0, \\ \Omega(0) = \Omega_0 \end{cases} \quad (1)$$

此处 $u = u(x, t)$ 和 $v = v(x, t)$ 是定义 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ 的子集 $\{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}; x \in \overline{\Omega(t)}, \Omega(t) \geq 0\}$ 上的未知函数, 其中对于每个 $t > 0$, $\Omega(t)$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 中的一个事先未知的有界区域, 其边界 $\partial\Omega(t)$ 须由未知

函数 u 和 v 同时确定。此外, $\lambda, \mu, a, b, \beta$ 均为正常数, V_n 表示移动边界 $\partial\Omega(t)$ 的法向速度, $\frac{\partial}{\partial n}$ 表示边界 $\partial\Omega(t)$ 的外法向导数, Ω_0 是 $\mathbb{R}^3$ 中已给定的有界区域。

上述问题是 Tarumi 等^[1]中提出的 protocells 数学模型的多维的情况。在此模型中, $\Omega(t)$ 是 protocells 在 t 时刻占据的空间区域, u 表示营养物质的浓度, v 表示构造物质 (液体) 的密度, 关于此模型的更多细节, 请读者参考文献 [1]。本文与文献 [1] 的不同之处在于, 我们研究的是径向不对称 (非球对称) 的 protocells, 而文献 [1] 只研究径

* 收稿日期: 2008-07-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10771223)

作者简介: 柏 萌 (1982 年生), 女, 博士生; E-mail: baimeng.clare@yahoo.com.cn

向对称的情形。

Cui 等^[2]已经对相应的径向对称 protocell 模型做了很清楚的研究,证明了这个问题最多有两个径向对称(球对称)的稳态解,并且分别给出了存在一个径向对称(球对称)稳态解,两个径向对称(球对称)稳态解或者无径向对称(球对称)稳态解的条件。此外,他们还研究了在径向扰动下,径向对称稳态解的渐近稳定性。本文主要针对非球对称的情况,对于任意的星形有界光滑初始区域 Ω_0 ,我们将建立问题(1)的局部适定性。

最近几年,许多学者对 protocell 模型做了严格的数学分析。关于径向对称的 protocells 的研究,除了上述提及的 Cui 等^[2]的工作外,还请读者参阅 Friedman 等^[3]的工作,此文研究的是一个不同的 protocells 模型。最近, Friedman 等^[4]还考虑了此 protocell 模型的非球对称情况。文献[4]的方法是基于幂级数逼近的,而我们将采用泛函分析的方法来研究问题(1),即:我们首先将问题(1)化为 Banach 空间的微分方程,接着利用 Banach 空间中的微分方程的抽象理论(参见 Lunardi^[5])来分析。

我们采用的方法与 Escher 等^[6-9]及 Cui 等^[10-11]有一些相似之处。比较此文与上述文献,可以发现,文献[6-7, 9-13]中,自由边界的移动均被演化方程 $V_n = -\frac{\partial p}{\partial n}$ 所控制,此处, p 为压强且在 $\Omega(t)$ 中满足一个类似于本文 v 满足的方程,但是其满足完全不同的边界条件: $p = \gamma\kappa$, 其中 γ 是正常数, κ 是 $\partial\Omega(t)$ 的平均曲率。本文将研究在没有此表面张力方程 $p = \gamma\kappa$ 的情况下,问题(1)是否具有适定性。文献[8]研究了一个与 Hele-Shaw 问题相关的模型,此模型是比较简单的没有表面张力的模型。本文将借鉴此方法研究 protocells 模型(1)。

在表述本文的主要结果之前,先引入一些记号。用 S^2 表示 $\mathbb{R}^3$ 中球心在原点的单位球面。给定 $m \in \mathbb{R}$ 和 $\alpha \in (0, 1)$, 记 $h^{m+\alpha}(S^2)$ 为 $C^\infty(S^2)$ 在 $C^{m+\alpha}(S^2)$ 中的闭包。类似地, 给定一有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, 则 $h^{m+\alpha}(\bar{\Omega})$ 为 $C^\infty(\bar{\Omega})$ 在 $C^{m+\alpha}(\bar{\Omega})$ 中的闭包。此外, $h_+^{m+\alpha}(S^2)$ 是由 $h^{m+\alpha}(S^2)$ 中所有正函数所构成的锥。给定 $T > 0$ 和 $\rho \in C([0, T], h_+^{m+\alpha}(S^2))$, 令

$$D_{\rho,T} = \left\{ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 : x = r\omega, 0 \leq r < \rho(t,\omega), \right. \\ \left. \omega \in S^2, 0 \leq t < T \right\}$$

若 ρ 已知, 则集合 $D_{\rho,T}$ 可分别视为 u 和 v 的定

义域。

我们的主要结论是问题(1)在 little Hölder 空间具有局部适定性, 如下:

定理 1 给定 $\rho_0 \in h_+^{m+\alpha}(S^2)$ 和集合 $\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = r\omega, 0 \leq r < \rho_0(\omega), \omega \in S^2\}$, 则存在 $T > 0$ 使得问题(1)在 $[0, T]$ 上有唯一解 (u, v, Ω) 。此外, 我们还有

$$\Omega(t) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = r\omega, 0 \leq r < \rho(t,\omega), \omega \in S^2\}$$

其中 $\rho \in C([0, T], h_+^{m+\alpha}(S^2)) \cap C^1((0, T], h^{m+\alpha-1}(S^2))$, 且 $(u, v) \in C(\bar{D}_{\rho,T}) \times C(\bar{D}_{\rho,T})$

$$\forall 0 \leq t \leq T, (u(\cdot, t), v(\cdot, t)) \in h^{m+\alpha}(\Omega(t)) \times h^{m+\alpha}(\bar{\Omega}(t))$$

此定理将在后面的几节中逐步证明。

本文的结构如下: 在第一节中我们将自由边界问题(1)化为固定参考区域 Ω_e 中的初边值问题, 进而将此初边值问题化为仅含有自由边界函数 η 的 Banach 空间中的微分方程。在第二节中我们证明此方程中非线性算子的 Frechét 导数是扇形算子, 则定理 1 直接得证。

1 问题的约化

在本节中我们将自由边界问题(1)化为只含有自由边界函数 η 的 Banach 空间上的微分方程。此化简过程分为两步: 第一步, 用 Hanzawa 变换将自由边界问题(1)转化为固定参考区域 Ω_e 中的初边值问题; 第二步, 解此初边值问题中含初边值条件的椭圆方程组, 并把解带入至自由边界函数 η 的演化方程中, 从而将此固定参考区域 Ω_e 中的初边值问题化为一个仅含有 η 的微分方程。

令 Ω_0 为(1)提及的 $\mathbb{R}^3$ 中的有界区域, Γ_0 为其边界。假设 Ω_0 是 $h^{m+\alpha}$ 类的且是星形的。其中对于任意 m 为正整数, $0 < \alpha < 1$, $h^{m+\alpha}$ 表示指标为 $m + \alpha$ 的 little Hölder 空间。不失一般性, 假设 Ω_0 的星形中心在原点。于是存在一个正函数 $\rho_0 \in h_+^{m+\alpha}(S^2)$ 使得 $\Gamma_0 = \left\{ \begin{matrix} x \in \mathbb{R}^3 : x = r\omega, r = \rho_0(\omega), \\ \omega \in S^2 \end{matrix} \right\}$ 。选取足

够小的正数 a 和 Γ_0 的 a 领域内的 C^∞ 超曲面 Γ_e , 使得 a 和 Γ_e 满足下列条件:

① 记 v_e 为 Γ_e 的单位外法向, 定义映照 $X: \Gamma_e \times (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$X(x, r) := x + rv_e(x), \forall x \in \Gamma_e, -a < r < a$$

此映照为从 $\Gamma_e \times (-a, a)$ 到其像 $R := \text{im}(X)$ 的 C^∞ 微分同胚。此处的外法向是指 Γ_e 围成的区域即后文记为 Ω_e 的外法向。

② $\Gamma_0 \subseteq R$, 且存在 $\eta_0 \in h^{m+\alpha}(\Gamma_e)$ 使得

$$\Gamma_0 = \{x + \eta_0(x)v_e(x) : x \in \Gamma_e\}$$

可见 η_0 为 Γ_0 到 Γ_e 的距离函数, 这是因为只要后面选取的 δ 足够的小, $\eta_0(x)$ 为 $x + \eta_0(x)v_e(x) \in \Gamma_0$ 到 Γ_e 的有向距离. 现将 X 的逆分成 $X^{-1} = (H, \Lambda)$, 使得 $H \in C^\infty(R, \Gamma_e)$ 且 $\Lambda \in C^\infty(R, (-a, a))$. 由定义可得:

$$H(y) + \Lambda(y)v_e(H(y)) = y, \forall y \in R$$

对于 $0 < \delta \leq a$, 记

$$O_\delta^{m+\alpha}(\Gamma_e) = \left\{ \eta \in h^{m+\alpha}(\Gamma_e) : \begin{cases} |\eta|_{C^1(\Gamma_e)} < \delta \end{cases} \right\}$$

给定 $\eta \in O_\delta^{m+\alpha}(\Gamma_e)$, 定义 $\theta_\eta := id_{\Gamma_e} + \eta v_e$, 和 $\Gamma_\eta := im(\theta_\eta)$. 显然, $\theta_\eta \in \text{Diff}^{m+\alpha}(\Gamma_e, \Gamma_\eta)$. 记 Ω_η 为 Γ_η 围成的区域, 易知 $\Gamma_{\eta_0} = \Gamma_0$ 且 $\Omega_{\eta_0} = \Omega_0$.

接着, 固定 $\delta \in (0, \frac{a}{4})$, 选取 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ 使得

$$0 \leq \varphi \leq 1, \varphi(s) = \begin{cases} 1, & \text{若 } |s| \leq \delta, \\ 0, & \text{若 } |s| > 3\delta, \end{cases}$$

以及 $\sup |\varphi'| < \frac{1}{\delta}$

给定 $\eta \in O_\delta^{m+\alpha}(\Gamma_e)$, 引入 Hanzawa 变换 $\Theta_\eta: \overline{\Omega_e} \rightarrow \overline{\Omega_\eta}$ 如下

$$\Theta_\eta(x) := \begin{cases} x + \varphi(\Lambda(x))\eta(H(x))v_e(H(x)), & \text{若 } x \in \overline{\Omega_e} \cap R; \\ x, & \text{若 } x \in \overline{\Omega_e} \setminus R \end{cases} \quad (2)$$

注意到, 由于 $|\varphi'(s)\eta(y)| < 1$, 函数 $[s \rightarrow s + \varphi(s)\eta(y)]$ 是严格单调上升的, 则上述定义有意义且 $\Theta_\eta \in \text{Diff}^{m+\alpha}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \cap \text{Diff}^{m+\alpha}(\overline{\Omega_e}, \overline{\Omega_\eta})$. 此外, $\Theta_\eta|_{\Gamma_e} = \theta_\eta$. 分别记 Θ_η^* 和 $\Theta_{\eta*}$ 为由 Θ_η 导出的通常的前推和后拉算子. 即:

$$\Theta_\eta^* g = g \circ \Theta_\eta, \forall g \in C(\overline{\Omega_\eta}) \text{ 以及 } \Theta_{\eta*} f = f \circ \Theta_\eta^{-1}, \forall f \in C(\overline{\Omega_e})$$

类似的, 对于任意 $v \in C(\Gamma_\eta)$, 记 $\theta_\eta^* v = v \circ \theta_\eta$. 定义

$$M(\eta) := \Theta_\eta^* \circ \Delta \circ \Theta_{\eta*}, N(\eta) := \theta_\eta^* \cdot \frac{\partial}{\partial n} \cdot \Theta_{\eta*}$$

其中, n 表示 Γ_η 的单位外法向. $M(\eta)$ 是 $\overline{\Omega_e}$ 上二阶椭圆算子, 其系数均是 η 的一阶或二阶的光滑导函数, $N(\eta)$ 是从 $\overline{\Omega_e}$ 到 Γ_e 的一阶迹微分算子, 其系数是 η 一阶的光滑导函数. 显而易见

$$M(\eta) \in C^\infty(O_\delta^{m+\alpha}(\Gamma_e), L(h^{m+\alpha}(\overline{\Omega_e}), h^{m-2+\alpha}(\overline{\Omega_e}))) \quad (3)$$

$$N(\eta) \in C^\infty(O_\delta^{m+\alpha}(\Gamma_e), L(h^{m+\alpha}(\overline{\Omega_e}), h^{m-1+\alpha}(\Gamma_e))) \quad (4)$$

最后, 记 γ_0 为从 $\overline{\Omega_e}$ 到 Γ_e 通常意义下的迹算子, 即: $\forall f \in C(\overline{\Omega_e}), \gamma_0 f = f|_{\Gamma_e}$.

利用以上的记号, 易得, Hanzawa 变换将问题

(1) 转化为下面的等价问题

$$M(\eta)\tilde{u} = \lambda\tilde{u}, x \in \Omega_e, t \geq 0, \quad (5)$$

$$\gamma_0\tilde{u} = a, x \in \Gamma_e, t \geq 0, \quad (6)$$

$$M(\eta)\tilde{v} = \mu\tilde{v} - \tilde{u}, x \in \Omega_e, t \geq 0 \quad (7)$$

$$\gamma_0\tilde{v} = b, x \in \Gamma_e, t \geq 0, \quad (8)$$

$$\partial_t \eta = -N(\eta)\tilde{v} - \beta\gamma_0\tilde{v}, x \in \Gamma_e, t > 0 \quad (9)$$

$$\eta(0) = \eta_0, t = 0 \quad (10)$$

于是, 我们有如下引理:

引理 1 给定 $\rho_0 \in h_+^{m+\alpha}(S^2)$, $\eta_0 \in O_\delta^{m+\alpha}(\Gamma_e)$ 是在 Γ_e 上, 由 ρ_0 依条件 (i) 和 (ii) 得到的函数. 若 $(\tilde{u}, \tilde{v}, \eta)$ 是问题 (5) - (10) 的解且 $\eta(\cdot, t) \in O_\delta^{m+\alpha}(\Gamma_e)$, 则令 $u(\cdot, t) = \Theta_{\eta*}\tilde{u}(\cdot, t)$, $v(\cdot, t) = \Theta_{\eta*}\tilde{v}(\cdot, t)$, $\Omega(t) = \Omega_\eta$, 可得 (u, v, Ω) 是问题 (1) 的解. 反之, 若 (u, v, Ω) 是问题 (1) 的解, 且 $\eta(\cdot, t) \in O_\delta^{m+\alpha}(\Gamma_e)$, 则令 $\tilde{u}(\cdot, t) \in \Theta_\eta^* u(\cdot, t)$, $\tilde{v}(\cdot, t) \in \Theta_\eta^* v(\cdot, t)$, 可得 $(\tilde{u}, \tilde{v}, \eta)$ 是问题 (5) - (10) 的解.

为进一步简化方程, 我们需要下面的引理作为预备知识:

引理 2 给定 $\eta \in O_\delta^{m+\alpha}(\Gamma_e)$, $(f, h) \in h^{m+\alpha'-2}(\overline{\Omega_e}) \times h^{m+\alpha'}(\Gamma_e)$, 其中 $m \geq 2, 0 < \alpha' \leq \alpha < 1$. 则下面的边值问题

$$\begin{cases} M(\eta)\tilde{u} - \nu\tilde{u} = f, x \in \Omega_e, \\ \gamma_0\tilde{u} = h, x \in \Gamma_e \end{cases} \quad (11)$$

有唯一解 $\tilde{u} = S_\nu(\eta)f + T_\nu(\eta)h \in h^{m+\alpha'}(\overline{\Omega_e})$.

并且

$$S_\nu \in C^\infty(O_\delta^{m+\alpha}(\Gamma_e), L(h^{m+\alpha'-2}(\overline{\Omega_e}), h^{m+\alpha'}(\overline{\Omega_e}))),$$

$$T_\nu \in C^\infty(O_\delta^{m+\alpha}(\Gamma_e), L(h^{m+\alpha'}(\Gamma_e), h^{m+\alpha'}(\overline{\Omega_e})))$$

证明 见 [4, 引理 3.1].

根据引理 2, 对于给定的 $\eta \in O_\delta^{m+\alpha}(\Gamma_e)$, 方程组 (5) - (8) 的解为:

$$\tilde{u} = T_\lambda(\eta)a, \tilde{v} = -S_\mu(\eta)T_\lambda(\eta)a + T_\mu(\eta)b \quad (12)$$

将 (12) 代入 (9), 可见问题 (5) - (10)

可以简化为下面的初值问题:

$$\begin{cases} \partial_t \eta = F(\eta), \forall t > 0, \\ \eta(0) = \eta_0 \end{cases} \quad (13)$$

其中

$$F(\eta) = N(\eta)S_\mu(\eta)T_\lambda(\eta)a - N(\eta)T_\mu(\eta)b + \beta\gamma_0 S_\mu(\eta)T_\lambda(\eta)a - \beta\gamma_0 T_\mu(\eta)b \quad (14)$$

由 (3) 式, (4) 式及引理 2, 易得

$$F \in C^\infty(O_\delta^{m+\alpha}(\Gamma_e), h^{m+\alpha-1}(\Gamma_e))$$

综上所述, 有如下引理:

引理 3 若 η 是问题 (13) 的解, 则由式 (12) 表示的 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{v}$ 为问题 (5) - (10) 的解。反之, 若 $(\tilde{u}, \tilde{v}, \eta)$ 为问题 (5) - (10) 的解, 则 η 为式 (13) 的解。

2 定理 1 的证明

本节给出定理 1 的证明。我们将证明对于任意 $(\eta \in O_\delta^{m+\alpha}(\Gamma_e))$, $F(\eta)$ 的 Frechét 导数 $DF(\eta)$ 是 $h^{m+\alpha-1}(\Gamma_e)$ 中定义域为 $h^{m+\alpha}(\Gamma_e)$ 的扇形算子, 根据 Banach 空间的抛物方程理论, 我们可以直接得到定理 1。

易得, $F(\eta)$ 的 Frechét 导数 $DF(\eta)$ 如下

$$DF(\eta)\zeta = P(\eta)\zeta + Q(\eta)\zeta, \forall \zeta \in h^{m+\alpha}(\overline{\Omega_e})$$

其中

$$\begin{aligned} P(\eta) = & N(\eta)[DS_\mu(\eta) \cdot 1T_\lambda(\eta)a + \\ & N(\eta)S_\mu(\eta)[DT_\lambda(\eta) \cdot 1a - N(\eta)[DT_\mu(\eta) \cdot 1b + \\ & [DN(\eta) \cdot 1S_\mu(\eta)T_\lambda(\eta)a - [DN(\eta) \cdot 1T_\mu(\eta)b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(\eta) = & \beta\gamma_0[DS_\mu(\eta) \cdot 1T_\lambda(\eta)a + \\ & \beta\gamma_0S_\mu(\eta)[DT_\lambda(\eta) \cdot 1a - \beta\gamma_0[DT_\mu(\eta) \cdot 1b \end{aligned}$$

$DF(\eta)$ 的主要部分是 $P(\eta)$ 。关于 $P(\eta)$ 有如下引理:

引理 4 对于任意 $\eta \in O_\delta^{m+\alpha}(\Gamma_e)$, $P(\eta)$ 为 $h^{m+\alpha-1}(\Gamma_e)$ 中定义域为 $h^{m+\alpha}(\Gamma_e)$ 的扇形算子。

证明 由简单的计算可知

$$DS_\mu(\eta) = -S_\mu(\eta)DM(\eta)$$

$$\text{以及 } DT_\lambda(\eta) = -S_\lambda(\eta)DM(\eta)$$

将上式代入 $P(\eta)$ 中可以看出 $P(\eta)$ 与文献 [8] 引理 2.6 中的算子 $-\partial\Phi(\rho)$ 具有相同的结构。则此定理可由文献 [8] 的定理 5.2 直接得出。

易知, 对于任意 $\eta \in O_\delta^{m+\alpha}(\Gamma_e)$, $Q(\eta) \in L(h^{m+\alpha}(\Gamma_e), h^{m+\alpha}(\Gamma_e))$ 。由于 $h^{m+\alpha}(\Gamma_e)$ 紧嵌入至 $h^{m+\alpha-1}(\Gamma_e)$, 则 $Q(\eta)$ 是从 $h^{m+\alpha}(\Gamma_e)$ 到 $h^{m+\alpha-1}(\Gamma_e)$ 的紧算子。因此, 根据扇形算子的扰动理论, 有如下的结论:

推论 1 对于任意 $\eta_0 \in O_\delta^{m+\alpha}(\Gamma_e)$, $DF(\eta) = P(\eta) + Q(\eta)$ 为 $h^{m+\alpha-1}(\Gamma_e)$ 中定义域为 $h^{m+\alpha}(\Gamma_e)$ 的扇形算子。

由文献 [5] 的定理 8.1.1, 8.3.4 以及本文的推论 1, 可得:

定理 2 给定 $\eta_0 \in O_\delta^{m+\alpha}(\Gamma_e)$, 则存在 $T > 0$ 使得初值问题 (13) 有唯一解

$$\eta \in C([0, T], h^{m+\alpha}(\Gamma_e)) \cap C^1([0, T], h^{m+\alpha-1}(\Gamma_e))$$

参考文献:

- [1] TARUMI K, SCHWEGER H. A nonlinear treatment of the protocell model by a boundary layer approximation[J]. Bull math boil, 1987, 49:307 - 320.
- [2] CUI S, FRIEDMAN A. Analysis of a mathematical model of protocell [J]. J Math Appl, 1999, 236:171 - 206.
- [3] FRIEDMAN A, HU B. A Stefen problem for a protocell model [J]. SIAM J Math Anal, 1999, 30:912 - 926.
- [4] FRIEDMAN A, HU B, VELAQUEZ J J L. A Stefen problem for a protocell model with symmetry-breaking bifurcations of analytic solutions [J]. Interfaces and Free Boundaries, 2001, 3(2):143 - 199.
- [5] LUNARDI A. Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems [M]. Birkhäuser, Verlag, 1995.
- [6] ESCHER J, SIMONETT G. On Hele-Shaw models with surface tension[J]. Math Res lett, 1996, 3:467 - 474.
- [7] ESCHER J, SIMONETT G. Classical solutions for Hele-Shaw models with surface tension [J]. Adv Diff Equa, 1997, 2:619 - 642.
- [8] ESCHER J, SIMONETT G. Classical solutions of multidimensional Hele-Shaw models with surface [J]. SIAM J Math Anal, 1997, 28:1028 - 1047.
- [9] ESCHER J, SIMONETT G. A center manifold analysis for the Mullins-Sekerka model [J]. J Differential Equations, 1998, 143, 267 - 292.
- [10] ESCHER J. Classical solutions to a moving boundary problem for an elliptic-parabolic system [J]. Interfaces Free Bound, 2004, 6:175 - 193.
- [11] CUI S. Well-posedness of a multidimensional free boundary problem modeling the growth of nonnecrotic tumors [J]. J Func Anal, 2007, 245:1 - 18.
- [12] FRIEDMAN A, REITICH F. Symmetry-breaking bifurcation of analytic solutions to free boundary problem [J]. Trans Amer Math Soc, 2000, 352:1587 - 1634.
- [13] GILLBARG D, TRUDINGER N S. Elliptic partial differential equations of second order [M]. Springer, 1977.